

# 量子力学の時間発展の双対性と統計力学

最上 嗣生\*

理化学研究所

351-0198 埼玉県和光市広沢2-1

平成16年 2月 19日

## Abstract

ボルツマンはH定理によって統計力学の基礎付けを正当化することを試みた。しかしその導出は確率を本質的に必要とするために力学の基礎法則とは相容れないものである。この論文では、量子力学の枠組みを逸脱することなくこの統計力学を正当化することを目指す。まず等重率の法則は双対な空間に移るとより証明しやすいことを指摘する。状態の双対とは観測である。次にその観測を表すオペレータの時間発展がボルツマン方程式に従うことを示す。この結果は時間が経つにつれて系の状態の等重率からのずれが観測できなくなっていくことを意味する。

## Introduction

ボルツマンによるH定理の定式化によって、力学に確率を導入することが仮に許されるのならば熱力学的な非可逆現象が説明できることが明らかになった。しかし、古典力学的世界観は確率の存在を許さないので、むしろH定理は非可逆性についての謎を深めたとも言えるだろう。

そこで、量子力学に本質的に含まれる確率性を使えばこの問題が解決するのではないかという想像は誰でもしたことがあるだろう。しかし、どの教科書にも書いてあるとおり、確率とはいっても量子系の純粋状態としての確率は統計力学を受け入れる余地を持っていない。統計力学を受け入れるためには量子力学の空間を混合状態をゆるすように拡張しなく

---

\*e-mail: mogami@brain.riken.go.jp

てはならない。しかし量子力学的混合状態は古典力学における位相空間上での確率分布とほぼ同じものである。従って量子力学を導入しても相変わらずボルツマンの理解から一步も進んでいないのである。

このように非可逆性の本源に関する微視的理論を我々はもっていない。熱的でかつ時間変化するような現実でありふれた現象を記述する微視的理論を我々は実は持っていないのである。

以下本論では、状態ではなくその双対である観測の演算子の時間発展について考えれば混合状態の導入、すなわち物理法則の拡張、なしにボルツマン方程式が量子力学上で成立することを示す。

系のハミルトニアンは  $H = H_0 + V$  と自由部分と相互作用に分けられていて  $V$  は十分に小さいものとする。  $|k\rangle$  は  $H_0$  の固有状態を表すものとして、その固有値を  $E_k$  とする。摂動的に構成した  $H$  の固有状態を  $|\tilde{k}\rangle$  としその固有値すなわちエネルギーを  $\tilde{E}_k$  と書く。あるエネルギー  $E$  の小さな近傍  $I: |\tilde{E}_k - E| < \Delta E$  内に多くの固有状態があるような系—例えば多粒子系—を考える。この近傍内にある状態の和を

$$|\psi\rangle = \sum_k \psi_k |\tilde{k}\rangle \quad (1)$$

と書くことにする。

統計力学は、任意の状態  $|\psi\rangle$  に対して十分な時間が経つと重み  $|\psi_k|^2$  が  $k$  によらず同じ大きさになることを基本的な仮定としている。しかし量子力学の運動方程式からこの仮定を導出する試みは成功していない。<sup>1</sup>

しかし発想を逆転してみよう。ベクトル  $\vec{a}$  に対して任意の  $\sum_i b_i = 1$  なるベクトル  $\vec{b}$  について内積  $\sum_i a_i b_i = 1$  が言えれば、 $i$  によらず  $a_i = 1$  だといえることができる。つまり双対な空間で同じ事が証明できる。今回の問題に対しては純粋状態  $|\psi\rangle\langle\psi|$  の張る空間をもとの空間とし、観測の演算子で張る空間をその双対と考えて双対性を使ってみれば、 $|\psi_k|^2$  が  $k$  によらず一定になることは次の命題と双対である。エネルギー固有状態  $|\tilde{k}\rangle$  で表示して対角になるような任意の観測の演算子

$$\tilde{\rho} = \sum_k |\tilde{k}\rangle \rho_k \langle\tilde{k}| \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> というよりもそもそも、エネルギー固有状態同士の間には遷移があるはずがないのでそれは不可能である。しかしこの  $|\tilde{k}\rangle$  は (4) で定義する摂動的な近似解である。それは  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限で固有状態と見なすことができるが  $\epsilon$  が有限である限りは厳密には解ではないし  $\epsilon \rightarrow 0$  で一次の摂動部分は確率が発散するので well-defined な極限ではない。(しかし平面波が有限の波束の極限であるという話と同じ程度には well-defined である。) 一方  $\tilde{\rho}(t = \infty)$  は  $\epsilon \rightarrow 0$  で well-defined である。

に対してトレースは $t$ が大きくなるにつれ

$$\text{tr } \tilde{\rho} |\psi\rangle\langle\psi| = \text{tr } \tilde{\rho} e^{-iHt} |\psi_{t=0}\rangle\langle\psi_{t=0}| e^{+iHt} \rightarrow \int dk \tilde{\rho}_k \quad (3)$$

となる。

このとき  $\langle \tilde{k} | \psi \rangle = \psi_k$  であるから  $|\psi_k\rangle$  は  $k$  によらず一定であると言えることができる。この命題は摂動的でない場合でも同じである。この  $\tilde{\rho}$  は状態を表す密度演算子ではなくここでは計算の都合で導入されたものである。後でこれが観測の意味も持つことが分かるだろう。式(3)を示すためには任意の  $\tilde{\rho}$  に対して  $t$  が大きくなるにつれて  $e^{iHt} \tilde{\rho} e^{-iHt} \rightarrow \sum_{k \in I} |\tilde{k}\rangle 1 \langle \tilde{k}|$  となることを示せばよい。この論文では以下これを証明する。

## 固有状態と境界条件の選択

まず式(1)で出た「固有状態」  $|\tilde{k}\rangle$  の explicit な表式を求める。 $|k\rangle$  は  $H_0$  の固有値  $E_k$  の固有状態である。

$$|\tilde{k}^-\rangle \equiv |k\rangle - \frac{1}{H_0 - E_k - i\epsilon} V |k\rangle + \frac{1}{H_0 - E_k - i\epsilon} V \frac{1}{H_0 - E_k - i\epsilon} V |k\rangle - \dots \quad (4)$$

は  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限で  $H$  の固有状態の摂動解である。<sup>2</sup> 例として二次の項について計算してみよう。 $(H_0 + V)|\tilde{k}^-\rangle$  の二次の項は

$$- \sum_{i,j} |j\rangle \frac{-i\epsilon}{E_j - E_k - i\epsilon} V_{ji} \frac{1}{E_i - E_k - i\epsilon} V_{ik} \quad (5)$$

であり、その和の中身は0になるが、 $E_j = E_k$  のときと  $E_i = E_k$  のときだけは0にならないので

$$= - \sum_{i,j} |j\rangle \left( \delta_{jk} V_{ji} \frac{1}{E_i - E_k - i\epsilon} V_{ik} + \frac{1}{E_j - E_k - i\epsilon} V_{ji} \delta_{jk} V_{ik} \right) \quad (6)$$

---

<sup>2</sup>読者は

$$|\tilde{k}^-\rangle \equiv |k\rangle - \frac{1}{H_0 - E_k - i\epsilon} pV |k\rangle + \frac{1}{H_0 - E_k - i\epsilon} pV \frac{1}{H_0 - E_k - i\epsilon} pV |k\rangle - \dots$$

という表式の方に慣れていないかも知れない。ここで  $p = 1 - |k\rangle\langle k|$ 、 $\tilde{E}_k = E_k + V_{kk} + \dots$  である。(4)の表式はこれと少し異なるが、 $|\tilde{k}\rangle$  の normalization を変更すれば同じものになる。以下の計算には(4)の表式の方が便利である。

となる。全ての項に対して同様の操作を行い、これらの項を足し合わせると、

$$(H - E_k)|\tilde{k}\rangle = |\tilde{k}\rangle \left( V_{kk} - \sum_i V_{ki} \frac{1}{E_i - E_k - i\epsilon} V_{ik} + \dots \right) \quad (7)$$

と右辺が(スカラー) $\times|\tilde{k}\rangle$ の形になるので上の式は固有状態である。

また

$$\langle\tilde{k}^-| = \langle k| - \langle k|V \frac{1}{H_0 - E_k - i\epsilon} + \dots \quad (8)$$

と定義する。さらに $|\tilde{k}^-$ の $-i\epsilon$ の符号を入れ替えたものを $|\tilde{k}^+$ 、 $\langle\tilde{k}^-|$ の $-i\epsilon$ の符号を入れ替えたものを $\langle\tilde{k}^+|$ と書くことにする。

さて $\tilde{\rho}$ の定義(2)で現れる $|\tilde{k}\rangle$ は $|\tilde{k}^-$ とするべきだろうか $|\tilde{k}^+$ とするべきだろうか。本論では

$$\tilde{\rho} = \sum_k |\tilde{k}^+\rangle \rho_k \langle\tilde{k}^-| \quad (9)$$

の方を取る。以下がその理由である。

本論では、物理的状態とは全て外向き波の重ね合わせであると仮定する。従って量子力学的状態は $|\tilde{k}^-$ でなくてはならない。任意の物理的状態は $e^{-iHt}$ によって正の時間発展をしても物理的状態である。

一方観測の演算子 $\tilde{\rho}$ に含まれるbraベクトルの $i\epsilon$ の符号の選択はどうすべきだろうか。ある時刻で観測を行うことを考えると、その観測に影響を与える空間の範囲は時間をさかのぼるほど大きくなる。これは $\langle b|e^{-iHt}$ は $t$ が大きくなるにつれて広がっていく—つまり逆時間発展について外向き波である—ことを意味する。従ってbraとしては $\langle\tilde{k}^-|$ の空間を取るべきである。<sup>3</sup>これに対して、物理的純粋状態 $|\psi\rangle\langle\psi|$ の右手のbraは $|\tilde{k}^-$ の複素共役であるから $\langle\tilde{k}^+|$ であることに注意せよ。

## $\tilde{\rho}$ の時間発展の計算

以下 $\tilde{\rho}(t) = e^{+iHt}\tilde{\rho}e^{-iHt}$ をもとめることが目的であるから微分方程式

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[\rho, H] \quad (10)$$

<sup>3</sup>この選択は経路積分の理論でGreen関数としてFeynmannプロパゲータ $\Delta_F(t; \vec{x}' - \vec{x}) = \langle 0|T\phi(\vec{x}')e^{-iHt}\phi(\vec{x})|0\rangle$ を一般に選択することと一致している。

を解かなくてはならない。その便利のために“Liouvillian formalism”[1]を定義しておく。密度演算子は $\rho_{k'k}$ と言う具合に2つのindexを持つが、これをまとめて一つのindex  $(k', k)$  と見なせば $\rho_{(k', k)}$ をベクトルと見なすこともできる。そして $\rho \rightarrow [\rho, V]$ という変換は $\rho$ について線形なのだから、左ベクトル $\rho$ に右から線形演算子 $L_V$ をかけたものと見なして $\rho L_V$ と書く。同様に $[\rho, H_0]$ を $\rho L_0$ 、 $[\rho, H]$ を $\rho L_H$ と書く。また逆演算子 $(L_0 - \alpha)^{-1}$ は任意の $\rho$ に対して $[\rho X, H_0] - \alpha(\rho X) = \rho$ となるような演算子 $X$ として定義する。そうすれば式(10)は

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i\rho(L_0 + L_V) \quad (11)$$

と書ける。これはベクトルに対する線形演算子の式であるから量子力学的状態に対するのと同様に摂動的に解を求めることができる。

この記法を使うと $\tilde{\rho} = \sum_k |\tilde{k}^+\rangle \rho_k \langle \tilde{k}^-|$ を

$$\tilde{\rho} = \rho - \rho L_V \frac{1}{L_0 - i\epsilon} + \rho L_V \frac{1}{L_0 - i\epsilon} L_V \frac{1}{L_0 - i\epsilon} - \dots \quad (12)$$

$$\rho \equiv \sum_k |k\rangle \rho_k \langle k| \quad (13)$$

と書き直すことができる。1次は簡単すぎるので2次でこの等式が成り立っていることを確かめよう。ここで $1/(E_i - E_k - i\epsilon) \equiv L_{ik}$ という記号を導入する。 $\tilde{\rho}$ の二次の項は

$$\sum_k \sum_{ji} \{ |j\rangle L_{kj} V_{ji} L_{ki} V_{ik} \rho_k \langle k| - |j\rangle L_{kj} V_{jk} \rho_k V_{ki} L_{ik} \langle i| + |k\rangle \rho_k V_{kj} L_{jk} V_{ji} L_{ik} \langle i| \} \quad (14)$$

である。ここで

$$L_{kj} L_{ik} = (L_{kj} + L_{ik}) \frac{1}{E_i - E_j - 2i\epsilon} = (L_{kj} + L_{ik}) L_{ij} \quad (15)$$

をつかう。この式の右辺を求めるとき $1/(E_i - E_j - 2i\epsilon) = 1/(E_i - E_j - i\epsilon)$ とした。(3)式の中で $\psi$ が連続関数(後述)であれば、式の値が変わらないからである。すると式(14)は

$$\begin{aligned} &= \sum_k \sum_{ji} \{ |j\rangle V_{ji} L_{ki} V_{ik} \rho_k \langle k| - |j\rangle V_{jk} \rho_k V_{ki} (L_{kj} + L_{ik}) \langle i| + |k\rangle \rho_k V_{kj} L_{jk} V_{ji} \langle i| \} \frac{1}{L_0 - i\epsilon} \\ &= \sum_{k,i} \{ -|i\rangle L_{ki} V_{ik} \rho_k \langle k| + |k\rangle \rho_k V_{ki} L_{ik} \langle i| \} L_V \frac{1}{L_0 - i\epsilon} \quad (16) \end{aligned}$$

$$= \rho L_V \frac{1}{L_0 - i\epsilon} L_V \frac{1}{L_0 - i\epsilon}$$

と書くことができる。

さて、いよいよ  $\tilde{\rho}$  の時間発展を求める。(12)に  $L_H$  をかければ

$$i \frac{d}{dt} \tilde{\rho} = \tilde{\rho} (L_0 + L_V) = \sum_{k'} \tilde{\rho}_{k'} \mathcal{L}_{kk'} \quad (17)$$

を示すことができる。これはボルツマン方程式そのものである。ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kk'} &= -\left(L_V \frac{1}{L_0 - i\epsilon} L_V\right)_{(kk),(k'k')} + \left(L_V \frac{1}{L_0 - i\epsilon} L_V \frac{1}{L_0 - i\epsilon} L_V\right)_{(kk),(k'k')} \\ &\quad - \left(L_V \frac{1}{L_0 - i\epsilon} L_V \frac{1}{L_0 - i\epsilon} L_V \frac{1}{L_0 - i\epsilon} L_V\right)_{(kk),(k'k')} + \cdots \quad (18) \\ &= -\left(L_V \frac{1}{L_0 + L_V - i\epsilon} L_V\right)_{(kk),(k'k')} \end{aligned}$$

である。この導出には  $(\rho L_V)_{(kk)} = 0$  であることと、式(6)と同様の関係式を使った。

さて式(17)の帰結について考えてみよう。簡単のため  $\mathcal{L}_{kk'}$  の2次までを書き下してみる。

$$\mathcal{L}_{kk'} \simeq 2\pi i \delta(E_{k'} - E_k) |V_{k'k}|^2 - \delta_{k'k} \sum_{k''} 2\pi i \delta(E_{k''} - E_k) |V_{k''k}|^2 \quad (19)$$

$\mathcal{L}_{kk'}$  は状態  $k'$  から  $k$  への確率の移動を表すものと解釈することができ、そして式(17)はボルツマン方程式に対応するものと見なすことができる。ここで確率の保存： $\sum_{k'} \mathcal{L}_{kk'} = 0$  が成り立ちかつ  $k \neq k'$  に対して  $\mathcal{L}_{kk'} > 0$  であるから  $-\mathcal{L}$  の虚部は正定値である。したがってなんらかの対称性が空間を分割していない限りは、方程式(17)により  $\tilde{\rho}$  は長時間ののち  $\sum_{k \in I} |\tilde{k}\rangle 1\langle \tilde{k}|$  に収束する。

この結果の時間非対称性は式(9)での  $-i\epsilon$  の符号の選択、つまり外向き波を要請したことから来ている。これは散乱の量子論で普通に使われる選択である。このようにして、境界条件の選択がボルツマンのH定理に対する逆行性批判の問題を解決し、指数的に減衰する解が現れることは再帰性批判の問題を解決していることがわかる。

さて、 $\mathcal{L}_{k'k}$  の固有値の虚部が高次の項をまで入れても負であることは次のようにして確かめることができる。対角部分に限定された  $\mathcal{L}_{k'k}$  だけでなく、一般化して  $L_V(L_0 + L_V - \omega - i\epsilon)^{-1} L_V$  の固有値の虚部が正であること

を示すことにする。線形演算子  $L_V$  の固有値は実であり、 $\text{Im}(L_H - \omega - i\epsilon)^{-1}$  の固有値は実で正の値のみである。従って、 $\{L_V \text{Im}(L_H - \omega - i\epsilon)^{-1}\}^2$  は正定値だから  $L_V \text{Im}(L_H - \omega - i\epsilon)^{-1} L_V$  も正定値である。

また同様の議論から、対角に限らず一般の  $\rho$  がどのような形のときに非可逆性（虚部がゼロでない固有値）をもち、どのような時にはそうでないかも分かる。 $\epsilon$  が非常に小さいと考えると  $\rho$  が連続関数であるときは  $\rho L_V \text{Im}(L_0 - i\epsilon)^{-1}$  は

$$\rho L_V \text{Im} \left( \frac{1}{L_0 - i\epsilon} \right) = \sum_{k, k', l} \pi i \delta(E_{k'} - E_k) \{ \rho_{k'l} V_{lk} - V_{k'l} \rho_{lk} \} |k'\rangle \langle k| \quad (20)$$

である。 $f(x, y)$  を連続な関数だとして  $\rho_{kk'} = f(E_k, E_{k'})$  という形になっているとこの式はゼロになる。つまり  $\rho_{k'l}$  がエネルギー  $E_k$  についての連続関数になっていないことが虚の固有値を持つための条件である。さらに  $\rho_{kk'} = g(E_k) \times \delta(E_k - E_{k'})$  のように  $E_k - E_{k'}$  方向については連続性をもたない関数の場合でも  $g$  が連続であれば  $\rho L_V \text{Im}(L_0 - \omega - i\epsilon)^{-1} = 0$  である。ただし、 $k$  は多次元の量でありうるが  $E_k$  は一次元であるから  $\rho$  が  $k$  の連続関数であっても  $\rho_{kk'}$  が  $E_k$  の連続関数ではない場合があることには注意しなくてはならない。

## 状態の性質と観測の性質

もし状態  $|\tilde{k}\rangle$  の直積  $|\tilde{k}\rangle \langle \tilde{k}|$  に対して観測演算子に対して行ったのと同様の議論をすれば式 (17) と同様の式が成り立ち、最初の状態は時間がたつにつれて混合状態へ変化してしまうが、これは量子力学に違反している。この問題を避けるために、量子力学的状態  $|\psi\rangle$  の波動関数  $\psi(k) = \langle k|\psi\rangle$  は  $k$  についての連続関数であると本論では仮定する。<sup>4</sup> そうすれば式 (20) に引き続いて言及したように非可逆な崩壊に関する部分は消えてしまうので、連続な波動関数をもつ状態  $|\psi\rangle$  から作った純粋状態  $|\psi\rangle \langle \psi|$  は時間発展をさせても相変わらず純粋状態のままである。この連続性の仮定は波動関数をどの観測量の固有値を使って表示するかには依存しない。なぜなら他の観測量を使った表示とは連続なユニタリー変換によって互いに結びついているからである。

<sup>4</sup>この物理状態についての仮定に従えば、式 (4) の「固有状態」は厳格に言えば物理状態ではない。このことは無限に広がる平面波が現実には存在しないことと対応している。実際にありうる状態は  $|\tilde{k}\rangle$  と連続関数とのたたみ込みである。

一方、観測演算子については連続でなくともよいものとする。すでに議論したように観測演算子に式(17)で表されるような非可逆な崩壊が見られるのは $\rho$ に不連続性があったためである。波動関数を連続関数とすれば、それが張る空間に双対な空間は超関数(distribution)の空間であり必然的に不連続関数を含む。また逆にdistributionの双対は連続関数である。

量子力学的状態は連続であることに対して観測演算子が連続でないことは不自然ではないかという疑問があるかもしれない。しかしこれは不自然ではない。例えば観測の最も単純な例である「何も観測しない」観測は絶対的に幅がゼロの密度演算子である単位演算子 $1_{k'k}$ によって表される。また $N$ 粒子系における粒子の一つだけを観測する演算子は直積で $1 \otimes A$ のようにやはり単位演算子を含んでいる。むしろ「残りに影響を与えることなく系の一部に対して観測を行うことができる」という観測の基本的性質が対角成分のまわりに不連続が現れる原因であると考えることが出来る。

さて、これまでは $\rho_{k'k}$ が対角成分のみをもつ場合のみが扱われていた。しかし全ての観測演算子が対角であるとは限らない。例えば粒子の位置を観測する演算子は $\rho' = \int_{x \in I} dx |x\rangle\langle x|$ という形をしている。 $H_0$ の固有状態のindex  $k$ が例えば運動量である場合はこの $\rho'$ は $|\tilde{k}\rangle$ の表示では対角ではなく対角成分の周りに有限の幅をもっている。このように観測演算子が対角ではない場合でも非可逆性は起きるのだろうか。すでに議論したように $\rho$ がエネルギーの連続関数であれば $L_V \text{Im}(L_0 - i\epsilon)^{-1} L_V$ がゼロである。もしこの $\epsilon$ が無限小ではなく有限の大きさをもつならば、条件は緩くなって $\rho$ が有限の幅を持つときでも非可逆な崩壊が起こりうる。さて、式(17)とそれに続く議論から分かるように $L_0 + L_V$ は虚の固有値を持ちうるので、 $L_V(L_0 + L_V - i\epsilon)^{-1} L_V$ の分母の $L_0 + L_V$ 自体もまた固有値に虚部 $i\lambda$ を持ちうる。これは $\epsilon$ が有限の大きさを持つのと同じ効果をもつ。

さらに同様の議論から $L_V(L_0 + L_V - \omega - i\epsilon)^{-1} L_V$ という演算子の $\omega \neq 0$ のときも虚部がありうる。このことから $\rho$ が非対角の場合も減衰が起こりうる。非対角の部分の減衰は位相のdecorrelationに関係してる。このことは有限の大きさの箱に閉じ込められた多粒子系を考えるときに特に意味を持つ。有限の大きさの箱の場合は外向き波だけであるという条件が成立せず、さらにスペクトルが離散になるので $L_V(L_0 - i\epsilon)^{-1} L_V$ において $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を $\epsilon = 0$ にしてしまうことができる。そのため式(20)は有限の箱では0になる。これでは有限の箱では非可逆現象は見られないこと

になってしまう。<sup>5</sup>しかし上で述べた  $-i\lambda$  の self consistent な生成を考えに入れると、スペクトルが離散な場合でも  $\lambda$  の幅のなかに他のスペクトルが入ってくればよいので虚部の生成が起こりうる。

## Discussion

式(17)が意味しているのは観測演算子の空間の一部が時間が経つにしたがい詳細を失うことである。これは生成した<sup>6</sup>ばかりの状態に対しては観測により多くの情報を得ることが出来るが、古くなった状態に対しては本質的に知り得ないことが存在し、それが増大することを意味する。つまり物理学の基本法則に従うと本質的に観測できないことが存在する。

ここで示されているのは直接に状態が均等になると言うことではない。むしろ状態が均等でないという事が本質的に観測できないと言うことである。この違いは微妙なものではあるけれども、観測できないことが保証されているものは存在しないというプラグマティズムを採用するならばこれは不在の証明といっても良いだろう。どのような観測手段をとっても等重率で分配された状態との違いを観測できないとすれば、端的にその状態は等重率を実現された状態そのものにみえるであろう。またこれは非可逆性と統計力学の普通の考え方「時間がたつにつれて不確実性(無知)が増大する」という考えと一致してもいる。

この描像をほかの2つの研究のそれと比較してみよう。[2]では連続スペクトルと1つの離散な状態のあいだで量子力学的遷移がおきるという単純なモデルを解析している。そして状態の空間を張る基底のうち1つが  $e^{-iEt-\gamma t}$  と指数的に崩壊することが示されている。この論文の中で  $-ie$  処方が本論と同じく時間非対称性の起源になっていることが指摘されている。この状態の崩壊により量子力学的状態の空間はより小さな空間に落ち込むわけであるから、不確実性は増大せず減少していくのでという点では我々と反対の描像をもっている。またこの方法は多粒子系の粒子同士の散乱のような孤立した状態をもたない問題には適用できないようである。

---

<sup>5</sup>実際の系はどんな箱であろうとも外界と電磁波の放射をやりとりしているのだから有限の空間に限られたものというより、むしろ外向き波をもつ系に近いのだし、スペクトル間隔の逆数よりもずっと短い寿命しか持たないのだから気にする必要はないのかも知れない。

<sup>6</sup>「生成」と言っても人間が無から物質や状態を生成するわけではないので、それは別の観測をしたという事を意味している。

さてボルツマンのH定理の導出にはよく見ると二つの異なった確率性が含意されている。一つ目は系の状態が位相空間の上の確率分布で記述されているということ。第二には確定した位置と運動量をもつ粒子の衝突の結果が確率分布になるということである。一方、論文 [3] では、もし状態の密度演算子が最初から混合状態であってかつ対角成分に特異性をもつとき、状態が時間非可逆な発展をし等重率の法則がなりたつことを示した。ここでは式 (17) の一部、対角成分に相当する部分だけが扱われている。この仕事は量子力学を使えば第二の確率性を adhoc に導入せず H 定理を証明できると言うことを示したと評価できる。しかし、第一の確率性については依然として前提であり正当化されていない。

対して我々の今回の理論は観測演算子がベクトルの直積で書けないことと不連続性を持っていることのみを前提とした。本論ではこのように一般に認められている事のみを前提として第一の確率性の問題を回避して非可逆性を示す方法を提示できた。

## 参考文献

- [1] T. Petrosky and I. Prigogine, Alternative formulation of classical and quantum dynamics for non-integrable systems, *Physica A*175 (1991) 146.
- [2] I.E. Antoniou and I. Prigogine, Intrinsic irreversibility and integrability of dynamics, *Physica A*192 (1993) 443.
- [3] T. Petrosky and I. Prigogine, Quantum Chaos, Complex Spectral Representations and Time-Symmetry Breaking, *Chaos, Solitons & Fractals* Vol.4 (1994) 311.